SET – 3

Series : SSO/1

कोड नं.
Code No. **65/1/3/D**

रोल नं.
Roll No. | | | | | | | |

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **8** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जायेगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **8** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **26** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे] *[अधिकतम अंक : 100*
*Time allowed : **3** hours]* *[Maximum Marks : **100***

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्नों के उत्तर लिखने हैं ।*

(ii) *कृपया जाँच लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न है ।*

(iii) *प्रत्येक प्रश्न के लिए निर्धारित अंक उसके सामने दिए गए हैं ।*

(iv) *खण्ड-**क** के प्रश्न सं. **1–6** लघुत्तर प्रश्न हैं और प्रत्येक के लिए **1** अंक निर्धारित है ।*

(v) *खण्ड-**ख** के प्रश्न सं. **7–19** दीर्घ उत्तर **I** प्रकार के प्रश्न है और प्रत्येक के लिए **4** अंक निर्धारित हैं ।*

(vi) *खण्ड-**ग** के प्रश्न सं. **20–26** दीर्घ उत्तर **II** प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक के लिए **6** अंक निर्धारित हैं ।*

(vii) *उत्तर लिखना प्रारंभ करने से पहले कृपया प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *Please check that this Question Paper contains* ***26*** *Questions.*

(iii) *Marks for each question are indicated against it.*

(iv) *Questions* ***1*** *to* ***6*** *in Section-****A*** *are Very Short Answer Type Questions carrying* ***one*** *mark each.*

(v) *Questions* ***7*** *to* ***19*** *in Section-****B*** *are Long Answer* ***I*** *Type Questions carrying* ***4*** *marks each.*

(vi) *Questions* ***20*** *to* ***26*** *in Section-****C*** *are Long Answer* ***II*** *Type Questions carrying* ***6*** *marks each*

(vii) *Please write down the serial number of the Question before attempting it.*

खण्ड – क
SECTION – A

प्रश्न संख्या **1** से **6** तक प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है ।

Question numbers **1** to **6** carry **1** mark each.

1. वक्रों के कुल $v = \frac{A}{r} + B$ को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ A तथा B स्वेच्छ अचर हैं । **1**

Find the differential equation representing the family of curves $v = \frac{A}{r} + B$, where A and B are arbitrary constants.

2. अवकल समीकरण

$$\left(\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{dy} = 1$$

का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए । **1**

Find the integrating factor of the differential equation

$$\left(\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{dy} = 1.$$

3. यदि $\vec{a} = 7\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$ है, तो सदिश $\vec{a}$ का सदिश $\vec{b}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए । **1**

If $\vec{a} = 7\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$, then find the projection of $\vec{a}$ on $\vec{b}$.

4. यदि सदिश $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{c} = \lambda\hat{j} + 3\hat{k}$ समतलीय हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए । **1**

Find λ, if the vectors $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{c} = \lambda\hat{j} + 3\hat{k}$ are coplanar.

5. यदि एक रेखा x-अक्ष से 90°, y-अक्ष से 60° तथा z-अक्ष से न्यूनकोण θ बनाती है, तो θ ज्ञात कीजिए । **1**

If a line makes angles 90°, 60° and θ with x, y and z-axis respectively, where θ is acute, then find θ.

6. 3×3 कोटि के एक आव्यूह $A = (a_{ij})$ जिसके अवयव $a_{ij} = \dfrac{|i-j|}{2}$ द्वारा परिभाषित हैं, का अवयव a_{23} लिखिए । **1**

Write the element a_{23} of a 3×3 matrix $A = (a_{ij})$ whose elements a_{ij} are given by $a_{ij} = \dfrac{|i-j|}{2}$.

खण्ड – ख

SECTION – B

प्रश्न संख्या **7** से **19** तक प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है ।

Question numbers **7** to **19** carry **4** marks each.

7. यदि $x = a\cos\theta + b\sin\theta$, $y = a\sin\theta - b\cos\theta$ है, तो दर्शाइए कि $y^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$. **4**

If $x = a\cos\theta + b\sin\theta$, $y = a\sin\theta - b\cos\theta$, show that $y^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.

8. एक समबाहु त्रिभुज की भुजा 2 सेमी/s की दर से बढ़ रही है । इसके क्षेत्रफल की वृद्धि की दर क्या है जब भुजा की लम्बाई 20 सेमी है ? **4**

The side of an equilateral triangle is increasing at the rate of 2 cm/s. At what rate is its area increasing when the side of the triangle is 20 cm ?

9. ज्ञात कीजिए : $\int (x+3)\sqrt{3-4x-x^2}\, dx$. **4**

Find : $\int (x+3)\sqrt{3-4x-x^2}\, dx$.

10. तीन विद्यालय A, B तथा C बाढ़ द्वारा विस्थापित लोगों की सहायता के लिए राशि एकत्रित करने के लिए एक मेला लगाते हैं, जिनमें बच्चों द्वारा पुन:चक्रित वस्तुओं के प्रयोग से बने हाथ पंखे, चटाइयाँ तथा प्लेटें बेची जाती हैं, जिनमें से प्रत्येक का मूल्य क्रमश: ₹ 25, ₹ 100 तथा ₹ 50 है । मेले में बिक्री हुई उपरोक्त वस्तुओं की संख्या निम्न है : **4**

वस्तु \ विद्यालय	A	B	C
हाथ पंखे	40	25	35
चटाइयाँ	50	40	50
प्लेटें	20	30	40

तीनों विद्यालयों द्वारा उपरोक्त वस्तुओं की बिक्री से अलग-अलग एकत्रित राशि ज्ञात कीजिए तथा उनका योग भी ज्ञात कीजिए ।

उपरोक्त द्वारा जनित एक मूल्य भी लिखिए ।

Three schools A, B and C organized a mela for collecting funds for helping the rehabilitation of flood victims. They sold hand made fans, mats and plates from recycled material at a cost of ₹ 25, ₹ 100 and ₹ 50 each. The number of articles sold are given below :

Article \ School	A	B	C
Hand-fans	40	25	35
Mats	50	40	50
Plates	20	30	40

Find the funds collected by each school separately by selling the above articles. Also find the total funds collected for the purpose.

Write one value generated by the above situation.

11. यदि $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ है, तो $A^2 - 5A + 4I$ ज्ञात कीजिए ।

अत: आव्यूह X ज्ञात कीजिए ताकि $A^2 - 5A + 4I + X = O$ **4**

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो $(A')^{-1}$ ज्ञात कीजिए ।

If $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ find $A^2 - 5A + 4I$ and hence find a matrix X such that $A^2 - 5A + 4I + X = O$

OR

If $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, find $(A')^{-1}$.

12. यदि $f(x) = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ ax & a & -1 \\ ax^2 & ax & a \end{vmatrix}$ है, तो सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से $f(2x) - f(x)$ का मान ज्ञात कीजिए । **4**

If $f(x) = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ ax & a & -1 \\ ax^2 & ax & a \end{vmatrix}$, using properties of determinants find the value of $f(2x) - f(x)$.

13. ज्ञात कीजिए : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x}$ **4**

अथवा

निम्न का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Find : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x}$

OR

Integrate the following w.r.t. x

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

14. मान ज्ञात कीजिए : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos ax - \sin bx)^2 \, dx$ **4**

Evaluate : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos ax - \sin bx)^2 \, dx$

15. एक थैले A में 4 काली व 6 लाल गेंदें हैं तथा थैले B में 7 काली व 3 लाल गेंदें हैं । एक पासा उछाला जाता है । इस पर 1 या 2 आने पर थैला A चुना जाता है, अन्यथा थैला B । यदि चुने गए थैले से 2 गेंदें यादृच्छया (बिना प्रतिस्थापन) निकाली जाती है, तो इन गेंदों के एक लाल तथा एक काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । **4**

अथवा

एक न्याय्य सिक्के की चार उछालों पर प्राप्त चितों की संख्या का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए ।

A bag A contains 4 black and 6 red balls and bag B contains 7 black and 3 red balls. A die is thrown. If 1 or 2 appears on it, then bag A is chosen, otherwise bag B. If two balls are drawn at random (without replacement) from the selected bag, find the probability of one of them being red and another black.

OR

An unbiased coin is tossed 4 times. Find the mean and variance of the number of heads obtained.

16. यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, तो ज्ञात कीजिए $(\vec{r} \times \hat{i}) \cdot (\vec{r} \times j) + xy$ **4**

If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, find $(\vec{r} \times \hat{i}) \cdot (\vec{r} \times j) + xy$

17. रेखा $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$ और समतल $x - y + z = 5$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु की बिन्दु $(-1, -5, -10)$ से दूरी ज्ञात कीजिए । **4**

Find the distance between the point $(-1, -5, -10)$ and the point of intersection of the line $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$ and the plane $x - y + z = 5$.

18. यदि $\sin [\cot^{-1} (x + 1)] = \cos(\tan^{-1}x)$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए । **4**

अथवा

यदि $(\tan^{-1}x)^2 + (\cot^{-1}x)^2 = \frac{5\pi^2}{8}$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

If $\sin [\cot^{-1} (x + 1)] = \cos(\tan^{-1}x)$, then find x.

OR

If $(\tan^{-1}x)^2 + (\cot^{-1}x)^2 = \frac{5\pi^2}{8}$, then find x.

19. यदि $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)$, $x^2 \le 1$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए । **4**

If $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)$, $x^2 \le 1$, then find $\frac{dy}{dx}$.

खण्ड – ग

SECTION – C

प्रश्न संख्या **20** से **26** तक प्रत्येक प्रश्न **6** अंक का है ।

Question numbers **20** to **26** carry **6** marks each.

20. यदि A और B दो ऐसी स्वतंत्र घटनाएँ हैं जिनके लिए $P(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{15}$ और $P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{6}$, तो P(A) तथा P(B) ज्ञात कीजिए । **6**

If A and B are two independent events such that $P(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{15}$ and $P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{6}$, then find P(A) and P(B).

21. फलन $f(x) = \sin x - \cos x$, $0 < x < 2\pi$ के स्थानीय उच्चतम तथा निम्नतम ज्ञात कीजिए तथा स्थानीय उच्चतम तथा स्थानीय निम्नतम मान भी ज्ञात कीजिए । **6**

Find the local maxima and local minima, of the function $f(x) = \sin x - \cos x$, $0 < x < 2\pi$. Also find the local maximum and local minimum values.

22. ग्राफ द्वारा, $z = 2x + 5y$ का अधिकतम मान, निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए : **6**

$2x + 4y \le 8$

$3x + y \le 6$

$x + y \le 4$

$x \ge 0, y \ge 0$

Find graphically, the maximum value of $z = 2x + 5y$, subject to constraints given below :

$2x + 4y \le 8$

$3x + y \le 6$

$x + y \le 4$

$x \ge 0, y \ge 0$

23. माना N सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है । N × N पर संबंध R निम्न रूप से परिभाषित है :

(a, b) R (c, d) यदि ad(b + c) = bc(a + d), दिखाइए कि यह संबंध R एक तुल्यता संबंध है । **6**

Let N denote the set of all natural numbers and R be the relation on N × N defined by (a, b) R (c, d) if ad(b + c) = bc(a + d). Show that R is an equivalence relation.

24. वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ के बिंदु $(1, \sqrt{3})$ पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा अभिलंब और x-अक्ष की धनात्मक दिशा से परिबद्ध त्रिभुज का समाकलन के प्रयोग से क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । **6**

अथवा

योगफल की सीमा के रूप में $\int_1^3 (e^{2-3x} + x^2 + 1)dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

Using integration find the area of the triangle formed by positive x-axis and tangent and normal to the circle $x^2 + y^2 = 4$ at $(1, \sqrt{3})$.

OR

Evaluate $\int_1^3 (e^{2-3x} + x^2 + 1)dx$ as a limit of a sum.

25. अवकल समीकरण :

$(\tan^{-1}y - x)dy = (1 + y^2)dx$ का हल ज्ञात कीजिए । **6**

अथवा

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, जबकि $x = 0$ के लिए $y = 1$ है ।

Solve the differential equation :

$(\tan^{-1}y - x)dy = (1 + y^2)dx.$

OR

Find the particular solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ given that $y = 1$, when $x = 0$.

26. यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{1}$ परस्पर काटती है, तो k का मान ज्ञात कीजिए । अत: इन रेखाओं को अन्तर्विष्ट करने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए । **6**

If lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$ and $\frac{x-3}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{1}$ intersect, then find the value of k and hence find the equation of the plane containing these lines.

QUESTION PAPER CODE 65/3/D

EXPECTED ANSWERS/VALUE POINTS

SECTION - A

Marks

1.	$\cos^2 \pi/2 + \cos^2 \pi/3 + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$	½ + ½ m
2.	$a_{23} = \dfrac{\lvert 2-3 \rvert}{2} = \dfrac{1}{2}$	½ + ½ m
3.	$\dfrac{dv}{dr} = -\dfrac{A}{r^2}, \Rightarrow r^2 \dfrac{d^2v}{dr^2} + 2r\dfrac{dv}{dr} = 0$	½ + ½ m
4.	$I.F = e^{\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx} = e^{2\sqrt{x}}$	½ + ½ m
5.	$p = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert} = \dfrac{8}{7}$	½ + ½ m
6.	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 7$	½ + ½ m

SECTION - B

7. Let E_1 : selecting bag A, and E_2 : selecting bag B.

$\therefore P(E_1) = 1/3,\ P(E_2) = 2/3$ — ½ + ½ m

Let A : Getting one Red and one balck ball

$\therefore P(A|E_1) = \dfrac{^4C_1 \cdot {}^6C_1}{^{10}C_2} = \dfrac{8}{15},\ P(A|E_2) = \dfrac{^7C_1 \cdot {}^3C_1}{^{10}C_2} = \dfrac{7}{15}$ — 1+1 m

$$P(A) = P(E_1)\cdot P(A|E_1) + P(E_2)\cdot P(A|E_2)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{15} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{15} = \frac{22}{45}$$ 1 m

OR

x :	0	1	2	3	4	½ m
P (x) :	${}^4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4$	${}^4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)$	${}^4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$	${}^4C_3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3$	${}^4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4$	1½ m
:	$=\frac{1}{16}$	$=\frac{4}{16}$	$=\frac{6}{16}$	$=\frac{4}{16}$	$=\frac{1}{16}$	½ m
x P (x) :	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{4}{16}$	
x^2P (x) :	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{24}{16}$	$\frac{36}{16}$	$\frac{16}{16}$	½ m

Mean $= \sum x\, P(x) = \frac{32}{16} = 2$ ½ m

Variance $= \sum x^2\, P(x) - \left(\sum x\, P(x)\right)^2 = \frac{80}{16} - (2)^2 = 1$ ½ m

8. $\vec{r} \times \vec{i} = \left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) x\hat{i} = -y\hat{k} + z\hat{j}$ 1½ m

$\vec{r} \times \vec{j} = \left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) \hat{j} = x\hat{k} - z\hat{i}$ 1½ m

$\left(\vec{r} \times \hat{i}\right), \left(\vec{r} \times \vec{j}\right) = \left(o\hat{i} + z\hat{j} - y\hat{k}\right) \cdot \left(-z\hat{i} + o\hat{j} + x\hat{k}\right) = -xy$ ½ m

$\left(\vec{r} \times \hat{i}\right) \cdot \left(\vec{r} \times \vec{j}\right) + xy = -xy + xy = 0$ ½ m

9. Any point on the line $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$ is $(3\lambda+2, 4\lambda-1, 12\lambda+2)$ 1 m

If this is the point of intersection with plane $x - y + z = 5$

then $3\lambda + 2 - 4\lambda + 1 + 12\lambda + 2 - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ 1 m

$\therefore$ Point of intersection is $(2, -1, 2)$ 1 m

Required distance $= \sqrt{(2+1)^2 + (-1+5)^2 + (2+10)^2} = 13$ 1 m

10. Writing $\cot^{-1}(x+1) = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$ 1½ m

and $\tan^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 1½ m

$\therefore \sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}\right) = \cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ ½ m

$1+x^2+2x+1 = 1+x^2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ ½ m

OR

$(\tan^{-1}x)^2 + (\cot^{-1}x)^2 = \frac{5\pi^2}{8} \Rightarrow (\tan^{-1}x)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x\right)^2 = \frac{5\pi^2}{8}$ 1 m

$\therefore 2(\tan^{-1}x)^2 - \pi\tan^{-1}x - \frac{3\pi^2}{8} = 0$ 1½ m

$\tan^{-1}x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2+3\pi^2}}{4} = 3\pi/4, -\pi/4$ 1 m

$\Rightarrow x = -1$ ½ m

11. Putting $x^2 = \cos\theta$, we get ½ m

$y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}-\sqrt{1-\cos\theta}}\right)$ ½ m

$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta/2 + \sin\theta/2}{\cos\theta/2 - \sin\theta/2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1+\tan\theta/2}{1-\tan\theta/2}\right)$ 1 + ½ m

$$y = \frac{\pi}{4} + \theta/2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1}x^2$$ ½ m

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$$ 1 m

12. $$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta + b\cos\theta$$ ½ m

$$\frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta + b\sin\theta$$ ½ m

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a\cos\theta + b\sin\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta} = -\frac{x}{y}$$ 1½ m

or $$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$\therefore y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$ 1 m

Using (i) we get $y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + 1 = 0$ ½ m

$$\therefore y^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

13. Let x be the side of an equilateral triangle

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s.}$$ 1 m

Area (A) $= \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$ 1 m

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{dx}{dt}$$ 1 m

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (20) \cdot (2) = 20\sqrt{3} \text{ cm}^2|\text{s}$$ 1 m

14. Writing $x+3 = -\frac{1}{2}(-4-2x)+1$ 1 m

$$\therefore \int (x+3)\sqrt{3-4x-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int (-4-2x)\sqrt{3-4x-x^2}\,dx + \int \sqrt{7-(x+2)^2}\,dx$$ ½+½ m

$$= -\frac{1}{3}\left(3-4x-x^2\right)^{3/2} + \frac{x+2}{2}\sqrt{3-4x-x^2} + \frac{7}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{7}}\right) + c$$ 1+1 m

15.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} HF. & M & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 40 & 50 & 20 \\ 25 & 40 & 30 \\ 35 & 50 & 40 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 25 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 6125 \\ 7875 \end{pmatrix}$$ 1½ m

Funds collected by school A : Rs. 7000,

School B : Rs. 6125, School C : Rs. 7875 1 m

Total collected : Rs. 21000 ½ m

For writing one value 1 m

16. Getting $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ 1½ m

$$A^2 - 5A + 4I = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 0 & -5 \\ -10 & -5 & -15 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ 1 m

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & -10 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$ 1 m

$$\therefore \; X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$ ½ m

OR

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$ 1 m

$$|A'| = 1(-9) - 2(-5) = -9 + 10 = 1 \neq 0$$ ½ m

$$\text{Adj } A' = \begin{pmatrix} -9 & -8 & -2 \\ 8 & 7 & 2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$ 2 m

$$\therefore \; (A')^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & -8 & -2 \\ 8 & 7 & 2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$ ½ m

17. $$f(x) = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ ax & a & -1 \\ ax^2 & ax & a \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - xR_1$ and $R_3 \to R_3 - x^2 R_1$

$$f(x) = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & a+x & -1 \\ 0 & ax+x^2 & a \end{vmatrix}$$ (For bringing 2 zeroes in any row/column 1+1 m

$$\therefore \; f(x) = a\,(a^2 + 2ax + x^2) = a\,(x+a)^2$$ 1 m

$$\therefore \; f(2x) - f(x) = a\,[2x+a]^2 - a\,(x+a)^2$$

$$= a\,x\,(3x + 2a)$$ 1 m

18. $\int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x} = \int \frac{dx}{\sin x\,(1+2\cos x)} = \int \frac{\sin x \cdot dx}{(1-\cos x)\,(1+\cos x)\,(1+2\cos x)}$ 1 m

$= -\int \frac{dt}{(1-t)\,(1+t)\,(1+2t)}$ where $\cos x = t$ ½ m

$= \int \left(\frac{-1/6}{1-t} + \frac{1/2}{1+t} - \frac{4/3}{1+2t} \right) dt$ 1½ m

$= +\frac{1}{6}\log|1-t| + \frac{1}{2}\log|1+t| - \frac{2}{3}\log|1+2t| + c$ ½ m

$= \frac{1}{6}\log|1-\cos x| + \frac{1}{2}\log|1+\cos x| - \frac{2}{3}\log|1+2\cos x| + c$ ½ m

OR

$\int \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{2-3x-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ ½ m

$= 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \sqrt{1-x^2}\,dx$ 1 m

$= 2\sin^{-1}x + 3\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\sin^{-1}x + c$ (½+1+1) m

or $= \frac{3}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}(6-x)\sqrt{1-x^2} + c$

19. $I = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos ax - \sin bx)^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 ax + \sin^2 bx)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} 2\cos ax \sin bx\,dx$

$= I_1 - I_2$ ½ m

$I_1 = 2\int_0^{\pi} (\cos^2 ax + \sin^2 bx)\,dx$ (being an even fun.) 1 m

$I_2 = 0$ (being an odd fun.) 1 m

$\therefore I = I_1 = \int_0^{\pi} (1+\cos 2ax + 1 - \cos 2bx)\,dx$ ½ m

$= \left[2x + \frac{\sin 2ax}{2a} - \frac{\sin 2bx}{2b} \right]_0^{\pi}$ ½ m

$= \left[2\pi + \frac{1}{2a}\cdot \sin 2a\pi - \frac{\sin 2b\pi}{2b} \right]$ or 2π ½ m

SECTION - C

20. Any point on line $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$ is $(2\lambda+1, 3\lambda-1, 4\lambda+1)$ 1 m

$\therefore \quad \frac{2\lambda+1-3}{1} = \frac{3\lambda-1-k}{2} = \frac{4\lambda+1}{1} \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$, hence $k = \frac{9}{2}$ 2½ m

Eqn. of plane containing three lines is

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ 1 m

$\Rightarrow \quad -5(x-1) + 2(y+1) + 1(z-1) = 0$ 1 m

i.e. $\quad 5x - 2y - z - 6 = 0$ ½ m

21. $P(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{15} \Rightarrow P(\bar{A}) \cdot P(B) = \frac{2}{15}$ 1 m

$P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A) \cdot P(\bar{B}) = \frac{1}{6}$ 1 m

$\therefore \quad (1-P(A))P(B) = \frac{2}{15}$ or $P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{15}$ .... (i) 1 m

$P(A)(1-P(B)) = \frac{1}{6}$ or $P(A) - P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6}$ ....(ii) 1 m

From (i) and (ii) $P(A) - P(B) = \frac{1}{6} - \frac{2}{15} = \frac{1}{30}$ ½ m

Let $P(A) = x, \ P(B) = y \ \therefore \ x = \left(\frac{1}{30} + y\right)$

(i) $\Rightarrow \quad y - \left(\frac{1}{30} + y\right) y = \frac{2}{15} \ \therefore \ 30y^2 - 29y + 4 = 0$ ½ m

Solving to get $y = \frac{1}{6}$ or $y = \frac{4}{5}$

$\therefore\ x = \frac{1}{5}$ or $x = \frac{5}{6}$ ½ m

Hence $P(A) = \frac{1}{5},\ P(B) = \frac{1}{6}$ OR $P(A) = \frac{5}{6},\ P(B) = \frac{4}{5}$ ½ m

22. $f(x) = \sin x - \cos x,\ 0 < x < 2\pi$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x + \sin x = 0$ or $\tan x = -1,$ 1 m

$\therefore\ x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 1 m

$f''(x) = \cos x - \sin x$ 1 m

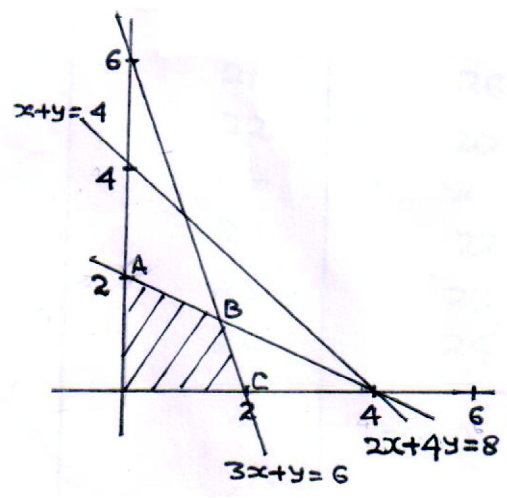
$f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ i.e – ve so, $x = \frac{3\pi}{4}$ is Local Maxima 1 m

and $f''\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ i.e + ve so, $x = \frac{7\pi}{4}$ is Local Minima 1 m

Local Maximum value $= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ½ m

Local Minimum value $= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ½ m

23.



Correct graphs of three lines 1x3 = 3 m

Correctly shading feasible region 1 m

Vertices are

A (0, 2), B (1.6, 1.2), C (2, .0) 1 m

Z = 2x + 5y is maximum

at A (0, 2) and maximum value = 10 1 m

24. $\forall$ a, b $\in$ N, (a, b) R (a, b) as ab (b + a) = ba (a + b)

$\therefore$ R is reflexive .... (i) 2 m

Let (a, b) R (c, d) for (a, b), (c, d) $\in N \times N$

$\therefore$ ad (b + c) = bc (a + d) .... (ii)

Also (c, d) R (a, b) $\because$ cb (d + a) = da (c + b) (using ii)

$\therefore$ R is symmetric .... (iii) 2 m

Let (a, b) R (c, d) and (c, d) R (e, f), for a, b, c, d, e, f, $\in$ N

$\therefore$ ad (b + c) = bc (a + d) and cf (d + e) = de (c + f) 1 m

$$\therefore \frac{b+c}{bc} = \frac{a+d}{ad} \text{ and } \frac{d+e}{de} = \frac{c+f}{cf}$$

$$\text{i.e } \frac{1}{c}+\frac{1}{b} = \frac{1}{d}+\frac{1}{a} \text{ and } \frac{1}{e}+\frac{1}{d} = \frac{1}{f}+\frac{1}{c}$$

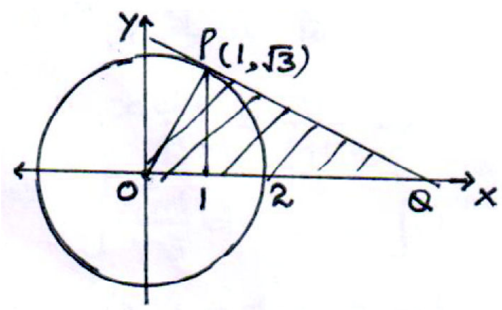
$$\text{adding we get } \frac{1}{c}+\frac{1}{b} + \frac{1}{e}+\frac{1}{d} = \frac{1}{d}+\frac{1}{a} + \frac{1}{f}+\frac{1}{c}$$

$\Rightarrow$ af (b + e) = be (a + f)

Hence (a, b) R (e, f) $\therefore$ R is transitive .... (iv) ½ m

Form (i), (iii) and (iv) R is an equivalence relation ½ m

25.



Correct Fig. 1 m

Eqn. of normal (OP) : $y = \sqrt{3}x$ ½ + ½ m

Eqn. of tangent (PQ) is

$$y-\sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \text{ i.e. } y = \frac{1}{\sqrt{3}}(4-x)$$ 1 m

Coordinates of Q (4, 0) ½ m

$$\therefore \text{ Req. area } = \int_0^1 \sqrt{3}x \, dx + \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{3}}(4-x)\,dx$$ ½+½ m

$$= \sqrt{3}\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_1^4$$ 1 m

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[16 - 8 - 4 + \frac{1}{2}\right] = 2\sqrt{3} \text{ sq. units}$$ ½ m

OR

$$\int_1^3 \left(e^{2-3x} + x^2 + 1\right)dx \qquad \text{here } h = \frac{2}{n}$$ ½ m

$$= \lim_{h \to 0} h\left[f(1) + f(1+h) + f(1+2h) + \ldots\ldots.. + f\left(1 + (n-1)h\right)\right]$$ 1 m

$$= \lim_{h \to 0} h\left[\left(e^{-1} + 2\right) + \left(e^{-1-3h} + 2 + 2h + h^2\right) + \left(e^{-1-6h} + 2 + 4h + 4h^2\right) + \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + \left(e^{-1-3(n-1)h} + 2 + 2(n-1)h + (n-1)^2 h^2\right)\right]$$ 1 m

$$= \lim_{h \to 0} h\left[e^{-1}\left(1 + e^{-3h} + e^{-6h} + \ldots.. + e^{-3(n-1)h}\right) + 2n + 2h\left(1 + 2 + \ldots. + (n-1)\right) + h^2\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right)\right]$$ 1½ m

$$= \lim_{h \to 0} h\left(e^{-1}.\frac{e^{-3nh} - 1}{e^{-3n} - 1}\cdot h + 2nh + 2\frac{nh\,(nh-h)}{2} + \frac{nh\,(nh-h)(2nh-h)}{6}\right)$$ 1 m

$$= e^{-1}.\frac{\left(e^{-6} - 1\right)}{-3} + 4 + 4 + \frac{8}{3} = -\ e^{-1}\frac{\left(e^{-6} - 1\right)}{3} + \frac{32}{3}$$ 1 m

26. Given differential equation can be written as

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{1+y^2} \cdot x = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$$ 1 m

$\therefore$ Integrating factor is $e^{\tan^{-1} y}$ 1 m

$\therefore$ Solution is : $x \cdot e^{\tan^{-1}y} = \int \frac{\tan^{-1}y \,.\, e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2}\, dy$ 1½ m

$\Rightarrow \quad x \cdot e^{\tan^{-1}y} = \int t\, e^t\, dt \quad \text{where } \tan^{-1}y = t$ 1 m

$= t\, e^t - e^t + c = e^{\tan^{-1}y}\left(\tan^{-1}y - 1\right) + c$ 1½ m

or $\quad x = \tan^{-1}y - 1 + c\, e^{-\tan^{-1}y}$

OR

Given differential equation is $\frac{dy}{dx} = \frac{y/x}{1+\left(y/x\right)^2}$

Putting $\frac{y}{x} = v$ to get $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^2}$ 1½ m

$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^2} - v = \frac{-v^3}{1+v^2}$ 1½ m

$\Rightarrow \int \frac{v^2+1}{v^3}\, dv = -\int \frac{dx}{x}$ ½ m

$\Rightarrow \log|v| - \frac{1}{2v^2} = -\log|x| + c$ 1 m

$\therefore \quad \log y - \frac{x^2}{2y^2} = c$ 1 m

$x = 0, y = 1 \Rightarrow c = 0 \;\therefore\; \log y - \frac{x^2}{2y^2} = 0$ ½ m